

Branch and Bound



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ ΕΠΕΑΕΚ

ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΕΝΩΣΗ
ΣΥΓΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΗ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ



Η ΠΑΙΔΕΙΑ ΣΤΗΝ ΚΟΡΥΦΗ
Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Εκπαίδευσης και Αρχικής
Επαγγελματικής Κατάρτισης

- Μέθοδος επίλυσης προβλημάτων ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού

- Μέθοδος επίλυσης προβλημάτων ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού
- Προσπαθούμε να αποφύγουμε την εξαντλητική αναζήτηση

- Μέθοδος επίλυσης προβλημάτων ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού
- Προσπαθούμε να αποφύγουμε την εξαντλητική αναζήτηση
- Διαχώριση : Διαμέριση του χώρου αναζήτησης σε μικρότερα υποσύνολα

- Μέθοδος επίλυσης προβλημάτων ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού
- Προσπαθούμε να αποφύγουμε την εξαντλητική αναζήτηση
- Διαχώριση : Διαμέριση του χώρου αναζήτησης σε μικρότερα υποσύνολα
- Εκτίμηση : Εκτιμούμε ένα πάνω φράγμα της τιμής για οποιαδήποτε λύση μέσα στο υπόδενδρο

- Πρέπει να διαλέξουμε σε ποια υποσύνολα θα διαχωρήσουμε τον χώρο αναζήτησης

- Πρέπει να διαλέξουμε σε ποια υποσύνολα θα διαχωρήσουμε τον χώρο αναζήτησης
- Θεωρούμε δύο σύνολα : Όταν μια συγκεκριμένη μεταβλητή που επιλέξουμε παίρνει την τιμή 0 και 1 αντίστοιχα

- Πρέπει να διαλέξουμε σε ποια υποσύνολα θα διαχωρήσουμε τον χώρο αναζήτησης
- Θεωρούμε δύο σύνολα : Όταν μια συγκεκριμένη μεταβλητή που επιλέξουμε παίρνει την τιμή 0 και 1 αντίστοιχα
- Πώς επιλέγουμε την μεταβλητή αυτή;

- Πρέπει να διαλέξουμε σε ποια υποσύνολα θα διαχωρήσουμε τον χώρο αναζήτησης
- Θεωρούμε δύο σύνολα : Όταν μια συγκεκριμένη μεταβλητή που επιλέξουμε παίρνει την τιμή 0 και 1 αντίστοιχα
- Πώς επιλέγουμε την μεταβλητή αυτή;
 - Στην τύχη

- Πρέπει να διαλέξουμε σε ποια υποσύνολα θα διαχωρήσουμε τον χώρο αναζήτησης
- Θεωρούμε δύο σύνολα : Όταν μια συγκεκριμένη μεταβλητή που επιλέξουμε παίρνει την τιμή 0 και 1 αντίστοιχα
- Πώς επιλέγουμε την μεταβλητή αυτή;
 - Στην τύχη
 - Συστηματικά

- Πρέπει να διαλέξουμε σε ποια υποσύνολα θα διαχωρήσουμε τον χώρο αναζήτησης
- Θεωρούμε δύο σύνολα : Όταν μια συγκεκριμένη μεταβλητή που επιλέξουμε παίρνει την τιμή 0 και 1 αντίστοιχα
- Πώς επιλέγουμε την μεταβλητή αυτή;
 - Στην τύχη
 - Συστηματικά
 - Εμπειρία παρελθόντος

- Πρέπει να διαλέξουμε σε ποια υποσύνολα θα διαχωρήσουμε τον χώρο αναζήτησης
- Θεωρούμε δύο σύνολα : Όταν μια συγκεκριμένη μεταβλητή που επιλέξουμε παίρνει την τιμή 0 και 1 αντίστοιχα
- Πώς επιλέγουμε την μεταβλητή αυτή;
 - Στην τύχη
 - Συστηματικά
 - Εμπειρία παρελθόντος
 - Επίλυση ενός υποπροβλήματος

- Πρέπει να διαλέξουμε σε ποια υποσύνολα θα διαχωρήσουμε τον χώρο αναζήτησης
- Θεωρούμε δύο σύνολα : Όταν μια συγκεκριμένη μεταβλητή που επιλέξουμε παίρνει την τιμή 0 και 1 αντίστοιχα
- Πώς επιλέγουμε την μεταβλητή αυτή;
 - Στην τύχη
 - Συστηματικά
 - Εμπειρία παρελθόντος
 - Επίλυση ενός υποπροβλήματος
- Επηρεασμός του χρόνου και του αριθμού ανιχνευμένων κόμβων

- Πριν τον διαχώρισμό ενός κόμβου ελέγχουμε αν υπάρχει πιθανότητα να βρίσκεται η βέλτιστη λύση στο συγκεκριμένο υπόδενδρο

- Πριν τον διαχώρισμό ενός κόμβου ελέγχουμε αν υπάρχει πιθανότητα να βρίσκεται η βέλτιστη λύση στο συγκεκριμένο υπόδενδρο
- Εκτίμηση του άνω ή κάτω φράγματος ανάλογα με την αντικειμενική συνάρτηση (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση αντίστοιχα) για κάθε λύση του

- Πριν τον διαχώρισμό ενός κόμβου ελέγχουμε αν υπάρχει πιθανότητα να βρίσκεται η βέλτιστη λύση στο συγκεκριμένο υπόδενδρο
- Εκτίμηση του άνω ή κάτω φράγματος ανάλογα με την αντικειμενική συνάρτηση (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση αντίστοιχα) για κάθε λύση του
- Αν γνωρίζουμε ήδη μια καλύτερη λύση από το αντίστοιχο φράγμα του υποδένδρου γνωρίζουμε πως η βέλτιστη λύση δεν βρίσκεται στο υπόδενδρο και δεν χρειάζεται να διαχωρίσουμε

- Πριν τον διαχώρισμό ενός κόμβου ελέγχουμε αν υπάρχει πιθανότητα να βρίσκεται η βέλτιστη λύση στο συγκεκριμένο υπόδενδρο
- Εκτίμηση του άνω ή κάτω φράγματος ανάλογα με την αντικειμενική συνάρτηση (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση αντίστοιχα) για κάθε λύση του
- Αν γνωρίζουμε ήδη μια καλύτερη λύση από το αντίστοιχο φράγμα του υποδένδρου γνωρίζουμε πως η βέλτιστη λύση δεν βρίσκεται στο υπόδενδρο και δεν χρειάζεται να διαχωρίσουμε
- Μια χονδρική εκτίμηση μπορεί να γίνει πολύ γρήγορα αλλά δεν περιορίζει αρκετά τον αριθμό των ανιχνευμένων κόμβων

- Πριν τον διαχώρισμό ενός κόμβου ελέγχουμε αν υπάρχει πιθανότητα να βρίσκεται η βέλτιστη λύση στο συγκεκριμένο υπόδενδρο
- Εκτίμηση του άνω ή κάτω φράγματος ανάλογα με την αντικειμενική συνάρτηση (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση αντίστοιχα) για κάθε λύση του
- Αν γνωρίζουμε ήδη μια καλύτερη λύση από το αντίστοιχο φράγμα του υποδένδρου γνωρίζουμε πως η βέλτιστη λύση δεν βρίσκεται στο υπόδενδρο και δεν χρειάζεται να διαχωρίσουμε
- Μια χονδρική εκτίμηση μπορεί να γίνει πολύ γρήγορα αλλά δεν περιορίζει αρκετά τον αριθμό των ανιχνευμένων κόμβων
- Μια ακριβής εκτίμηση μας επιτρέπει να αποφύγουμε μεγάλο μέρος του χώρου αναζήτησης αλλά ο υπολογισμός της επιβαρύνει σημαντικά τον συνολικό χρόνο

- Πριν τον διαχώρισμό ενός κόμβου ελέγχουμε αν υπάρχει πιθανότητα να βρίσκεται η βέλτιστη λύση στο συγκεκριμένο υπόδενδρο
- Εκτίμηση του άνω ή κάτω φράγματος ανάλογα με την αντικειμενική συνάρτηση (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση αντίστοιχα) για κάθε λύση του
- Αν γνωρίζουμε ήδη μια καλύτερη λύση από το αντίστοιχο φράγμα του υποδένδρου γνωρίζουμε πως η βέλτιστη λύση δεν βρίσκεται στο υπόδενδρο και δεν χρειάζεται να διαχωρίσουμε
- Μια χονδρική εκτίμηση μπορεί να γίνει πολύ γρήγορα αλλά δεν περιορίζει αρκετά τον αριθμό των ανιχνευμένων κόμβων
- Μια ακριβής εκτίμηση μας επιτρέπει να αποφύγουμε μεγάλο μέρος του χώρου αναζήτησης αλλά ο υπολογισμός της επιβαρύνει σημαντικά τον συνολικό χρόνο
- Εύρεση καλύτερου συμβιβασμού

- Παράδειγμα εκτίμησης για πρόβλημα ελαχιστοποίησης

- Παράδειγμα εκτίμησης για πρόβλημα ελαχιστοποίησης
- Έστω κόμβος S_i και συνάρτηση εκτίμησης κάτω φράγματος $f()$

- Παράδειγμα εκτίμησης για πρόβλημα ελαχιστοποίησης
- Έστω κόμβος S_i και συνάρτηση εκτίμησης κάτω φράγματος $f()$
- Έστω πως γνωρίζουμε ήδη μια εφικτή λύση του προβλήματος $\bar{x}$

- Παράδειγμα εκτίμησης για πρόβλημα ελαχιστοποίησης
- Έστω κόμβος S_i και συνάρτηση εκτίμησης κάτω φράγματος $f()$
- Έστω πως γνωρίζουμε ήδη μια εφικτή λύση του προβλήματος $\bar{x}$
- $\forall f(S_i) \begin{cases} \geq c\bar{x} & : \text{διαχωρίζουμε τον διαχώρισμό του } S_i \\ \text{διαφορετικά} & : \text{Δεν διαχωρίζουμε το } S_i \end{cases}$

- Αφού γίνει η διαχώρηση με ποια σειρά θα διασχίσουμε τον χώρο αναζήτησης·

- Αφού γίνει η διαχώρηση με ποια σειρά θα διασχίσουμε τον χώρο αναζήτησης:
 - Κατά βάθος (Depth First Search)
Συνήθως στην Συνδυαστική Βελτιστοποίηση

- Αφού γίνει η διαχώρηση με ποια σειρά θα διασχίσουμε τον χώρο αναζήτησης:
 - Κατά βάθος (Depth First Search)
Συνήθως στην Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
 - Κατά πλάτος (Bread First Search)
Συνήθως στην Τεχνητή Νοημοσύνη

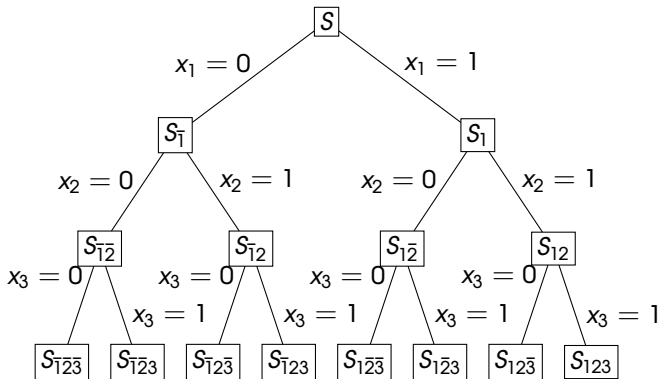
- Αφού γίνει η διαχώρηση με ποια σειρά θα διασχίσουμε τον χώρο αναζήτησης:
 - Κατά βάθος (Depth First Search)
Συνήθως στην Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
 - Κατά πλάτος (Bread First Search)
Συνήθως στην Τεχνητή Νοημοσύνη
 - Προς το καλύτερο (χειρότερο) ανάλογα με την αντικειμενική συνάρτηση

- Αφού γίνει η διαχώρηση με ποια σειρά θα διασχίσουμε τον χώρο αναζήτησης:
 - Κατά βάθος (Depth First Search)
Συνήθως στην Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
 - Κατά πλάτος (Bread First Search)
Συνήθως στην Τεχνητή Νοημοσύνη
 - Προς το καλύτερο (χειρότερο) ανάλογα με την αντικειμενική συνάρτηση
- Πολυπλοκότητα

- Αφού γίνει η διαχώρηση με ποια σειρά θα διασχίσουμε τον χώρο αναζήτησης:
 - Κατά βάθος (Depth First Search)
Συνήθως στην Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
 - Κατά πλάτος (Bread First Search)
Συνήθως στην Τεχνητή Νοημοσύνη
 - Προς το καλύτερο (χειρότερο) ανάλογα με την αντικειμενική συνάρτηση
- Πολυπλοκότητα
 - Θεωρητικά Εκθετική

- Αφού γίνει η διαχώρηση με ποια σειρά θα διασχίσουμε τον χώρο αναζήτησης:
 - Κατά βάθος (Depth First Search)
Συνήθως στην Συνδυαστική Βελτιστοποίηση
 - Κατά πλάτος (Bread First Search)
Συνήθως στην Τεχνητή Νοημοσύνη
 - Προς το καλύτερο (χειρότερο) ανάλογα με την αντικειμενική συνάρτηση
- Πολυπλοκότητα
 - Θεωρητικά Εκθετική
 - Πρακτικά με υπολογισμό του χρόνου και του αριθμού των κόμβων για την πολυπλοκότητα χώρου (μνήμης)

Αναζήτηση στο χώρο των λύσεων



Παράδειγμα (Πρόβλημα σακιδίου)

$$\begin{array}{llllllll} \min z = & -20x_1 & -16x_2 & -11x_3 & -9x_4 & -7x_5 & -x_6 & \\ s.t. & 9x_1 & +8x_2 & +6x_3 & +5x_4 & +4x_5 & +x_6 & \leq 12 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in \{0, 1\} \end{array}$$

Παράδειγμα (Πρόβλημα σακιδίου)

$$\begin{array}{llllllll} \min z = & -20x_1 & -16x_2 & -11x_3 & -9x_4 & -7x_5 & -x_6 & \\ s.t. & 9x_1 & +8x_2 & +6x_3 & +5x_4 & +4x_5 & +x_6 & \leq 12 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in \{0, 1\} \end{array}$$

Για την επίλυση θα χρησιμοποιήσουμε ως συνάρτηση εκτίμησης την λύση που επιστρέφει η Simplex για το συνεχές πρόβλημα. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα η λύση είναι τετριμμένα εύκολη

Παράδειγμα (Πρόβλημα σακιδίου)

$$\begin{array}{llllllll} \min z = & -20x_1 & -16x_2 & -11x_3 & -9x_4 & -7x_5 & -x_6 & \\ s.t. & 9x_1 & +8x_2 & +6x_3 & +5x_4 & +4x_5 & +x_6 & \leq 12 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in \{0, 1\} \end{array}$$

Για την επίλυση θα χρησιμοποιήσουμε ως συνάρτηση εκτίμησης την λύση που επιστρέφει η Simplex για το συνεχές πρόβλημα. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα η λύση είναι τετριμμένα εύκολη

- Διατάσσουμε τις μεταβλητές : $\frac{C_{j_1}}{a_{j_1}} \leq \frac{C_{j_2}}{a_{j_2}} \leq \dots \leq \frac{C_{j_l}}{a_{j_l}}$
όπου C_i το βάρος και a_i η αξία της μεταβλητής x_i

Παράδειγμα (Πρόβλημα σακιδίου)

$$\begin{array}{llllllll} \min z = & -20x_1 & -16x_2 & -11x_3 & -9x_4 & -7x_5 & -x_6 & \\ s.t. & 9x_1 & +8x_2 & +6x_3 & +5x_4 & +4x_5 & +x_6 & \leq 12 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in \{0, 1\} \end{array}$$

Για την επίλυση θα χρησιμοποιήσουμε ως συνάρτηση εκτίμησης την λύση που επιστρέφει η Simplex για το συνεχές πρόβλημα. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα η λύση είναι τετριμμένα εύκολη

- Διατάσσουμε τις μεταβλητές : $\frac{C_{j_1}}{a_{j_1}} \leq \frac{C_{j_2}}{a_{j_2}} \leq \dots \leq \frac{C_{j_l}}{a_{j_l}}$
όπου C_i ~~το βάρος~~ και a_i ~~η αξία~~ της μεταβλητής x_i
- Σύμφωνα με την παραπάνω διάταξη επιλέγουμε τις μεταβλητές στη σειρά και τις μεγιστοποιούμε μέχρι να κορεστεί ο περιορισμός

Παράδειγμα (Πρόβλημα σακιδίου)

$$\begin{array}{llllllll} \min z = & -20x_1 & -16x_2 & -11x_3 & -9x_4 & -7x_5 & -x_6 & \\ \text{s.t.} & 9x_1 & +8x_2 & +6x_3 & +5x_4 & +4x_5 & +x_6 & \leq 12 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in \{0, 1\} \end{array}$$

Για την επίλυση θα χρησιμοποιήσουμε ως συνάρτηση εκτίμησης την λύση που επιστρέφει η Simplex για το συνεχές πρόβλημα. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα η λύση είναι τετριμμένα εύκολη

- Διατάσσουμε τις μεταβλητές : $\frac{C_{j_1}}{a_{j_1}} \leq \frac{C_{j_2}}{a_{j_2}} \leq \dots \leq \frac{C_{j_i}}{a_{j_i}}$ όπου C_i το βάρος και a_i η αξία της μεταβλητής x_i
- Σύμφωνα με την παραπάνω διάταξη επιλέγουμε τις μεταβλητές στη σειρά και τις μεγιστοποιούμε μέχρι να κορεστεί ο περιορισμός

Βέλτιστη συνεχής λύση $x_1 = 1, x_2 = \frac{3}{8}, z = -26$

Διαχωρισμός στο S_1 :

$$x = \begin{cases} 1, & S_1 : \begin{cases} \min z = -20 - 16x_2 - 11x_3 - 9x_4 - 7x_5 - x_6 \\ 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + \cancel{4x_3} + x_6 < 3 \end{cases} \\ 0, & S_{\bar{1}} : \begin{cases} \min z = -16x_2 - 11x_3 - 9x_4 - 7x_5 - x_6 \\ 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + \cancel{4x_3} + x_6 < 12 \end{cases} \end{cases}$$

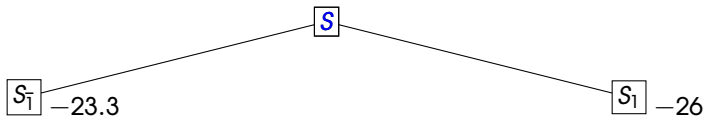
Διαχωρισμός στο S_1 :

$$x = \begin{cases} 1, & S_1 : \begin{cases} \min z = -20 - 16x_2 - 11x_3 - 9x_4 - 7x_5 - x_6 \\ 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 < 3 \end{cases} \\ 0, & S_{\bar{1}} : \begin{cases} \min z = -16x_2 - 11x_3 - 9x_4 - 7x_5 - x_6 \\ 8x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 + x_6 < 12 \end{cases} \end{cases}$$

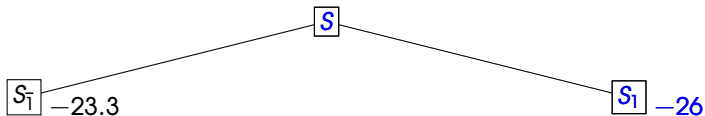
Βέλτιστη συνεχή λύση S_1 : $x_2 = \frac{3}{8}, z = -26$ Βέλτιστη συνεχή λύση $S_{\bar{1}}$:
 $x_2 = 1, x_3 = \frac{2}{3}, z = -\frac{70}{3} \approx -23.3$



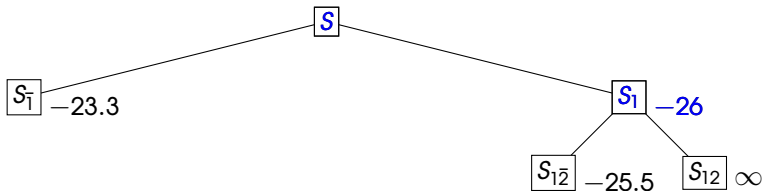
Αναζήτηση προς το καλύτερο



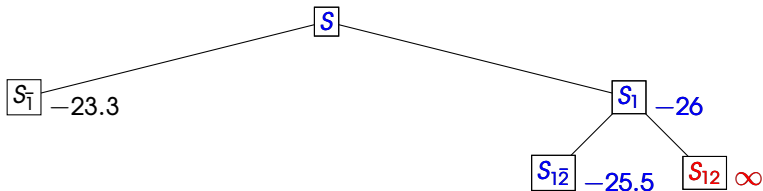
Αναζήτηση προς το καλύτερο



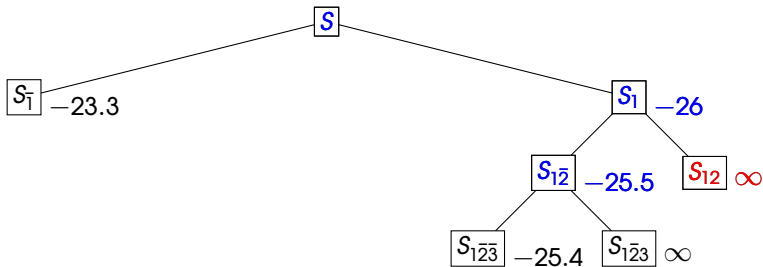
Αναζήτηση προς το καλύτερο



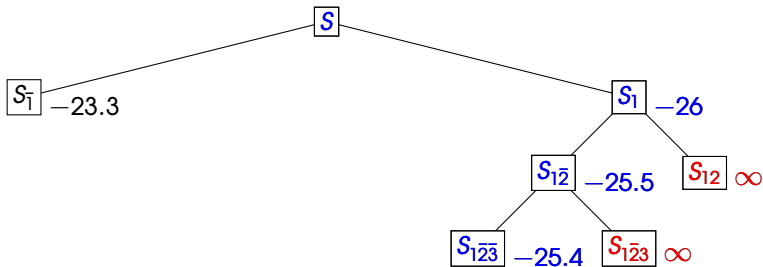
Αναζήτηση προς το καλύτερο



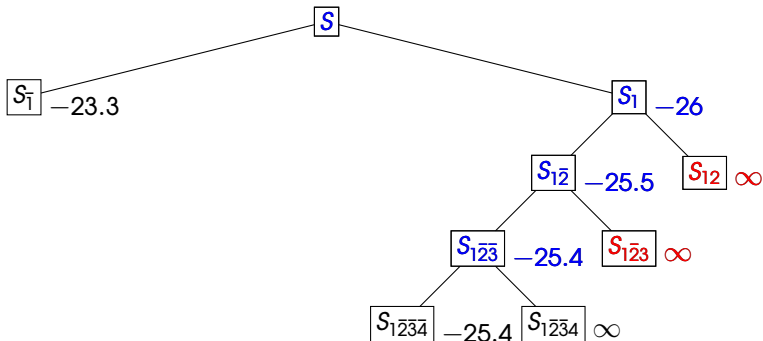
Αναζήτηση προς το καλύτερο



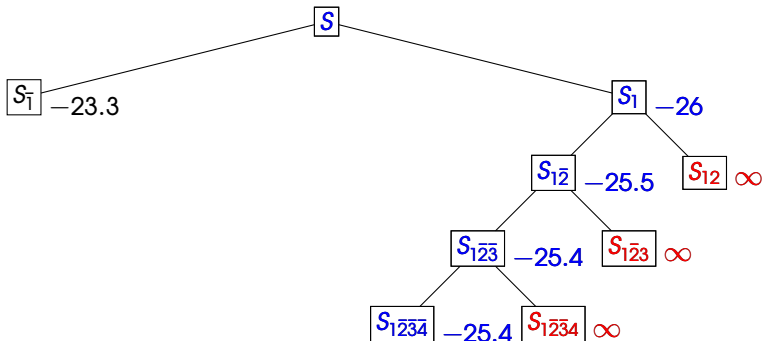
Αναζήτηση προς το καλύτερο



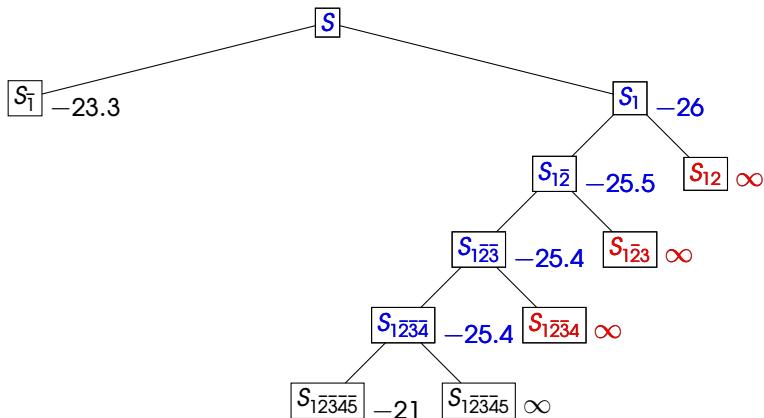
Αναζήτηση προς το καλύτερο



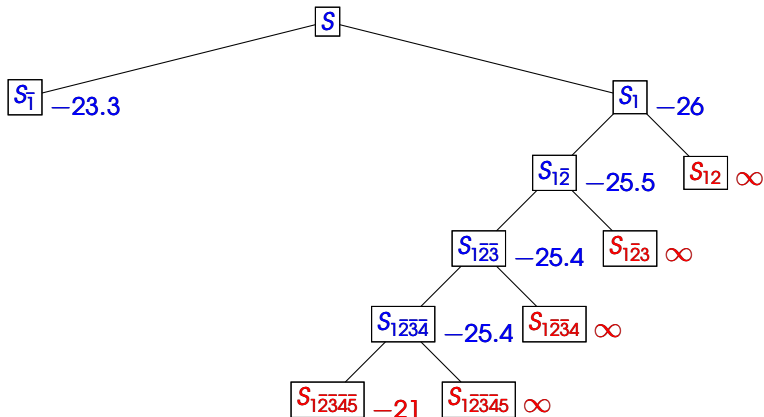
Αναζήτηση προς το καλύτερο

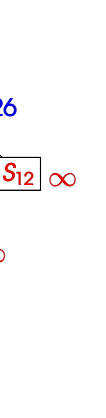


Αναζήτηση προς το καλύτερο

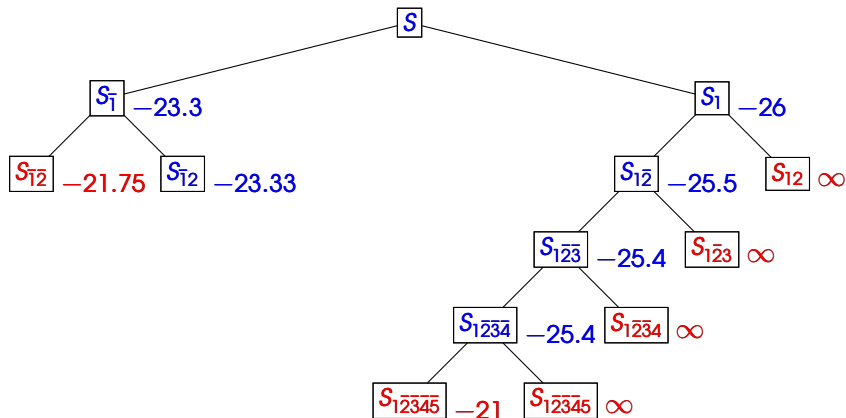


Αναζήτηση προς το καλύτερο

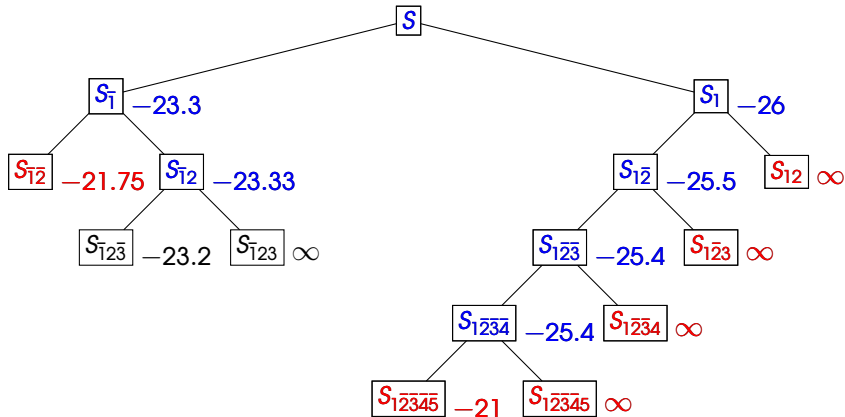




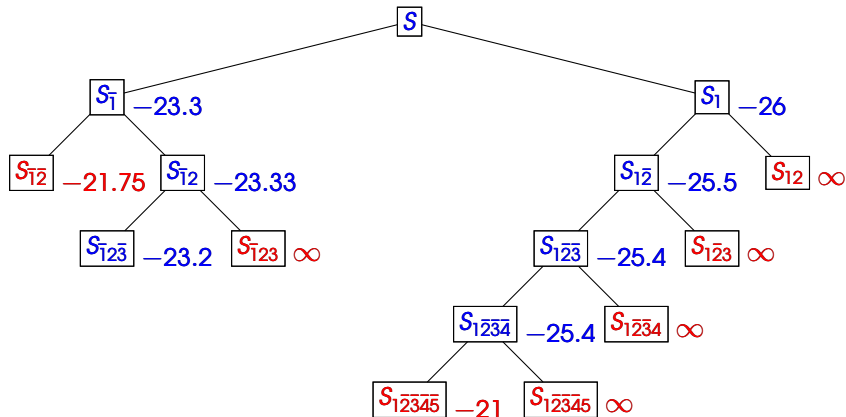
Αναζήτηση προς το καλύτερο



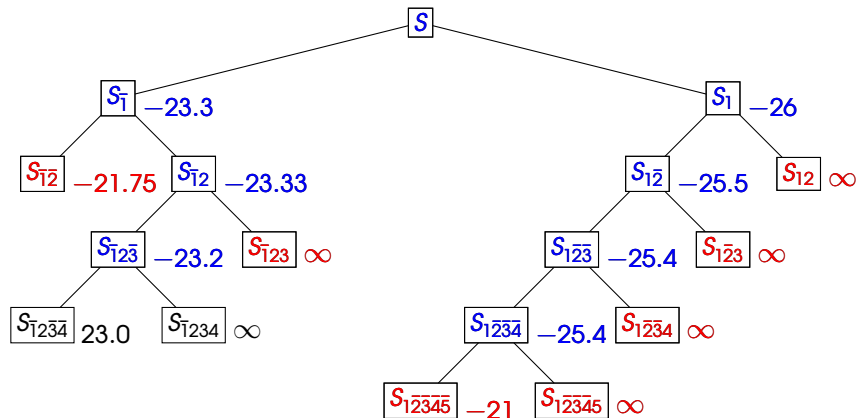
Αναζήτηση προς το καλύτερο



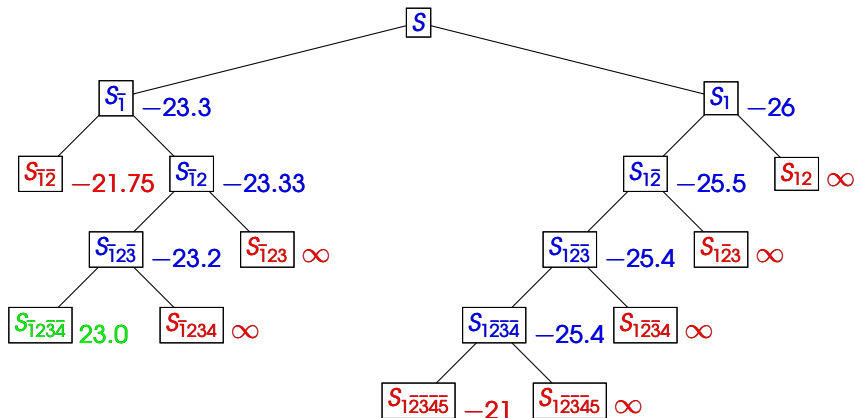
Αναζήτηση προς το καλύτερο



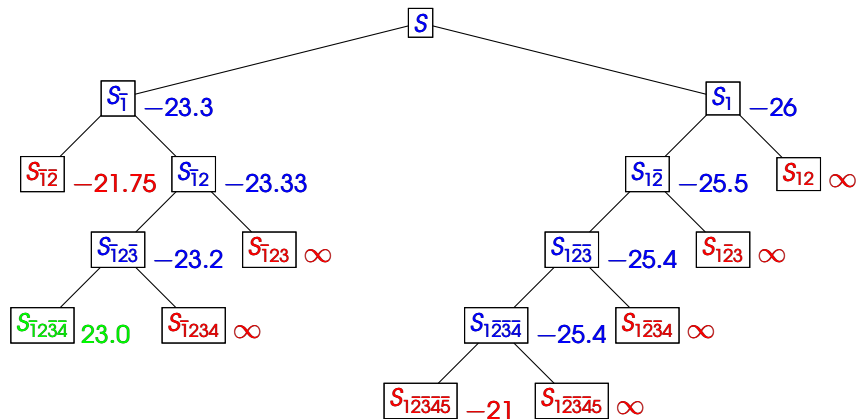
Αναζήτηση προς το καλύτερο



Αναζήτηση προς το καλύτερο



Αναζήτηση προς το καλύτερο



17 κόμβοι εξετάστηκαν αντί για $2^7 - 1$!